نسبتهای مثلثاتی

به نام خدا

وارد فصل دوم کتاب یعنی فصل مثلثات شدیم. دوستای عزیز دقت کنید که این مبحث یکی از مهمترین و پرکاربردترین مباحثیه که در ریاضی داریم. در درسهای سالهای بعد برای حد و مشتق و انتگرال خیلی با مثلثات کار داریم. توی درسهای دانشگاه هم همینطور، مخصوصا برای بچه‌های رشته ریاضی.

بنابراین توصیه میکنم برای یاد گرفتن این فصل خیلی زمان بذارید و فقط به حفظ کردن فرمولها اکتفا نکنید.

یکی از مباحثی که در ریاضی نهم خوندیم مربوط به شکلهای متشابه بود که در این فصل خیلی بهش احتیاج داریم. در ادامه یه مرور کوتاه از مطالب سال گذشته میکنیم و بعد درس رو ادامه میدیم.

@RiaziBaHam

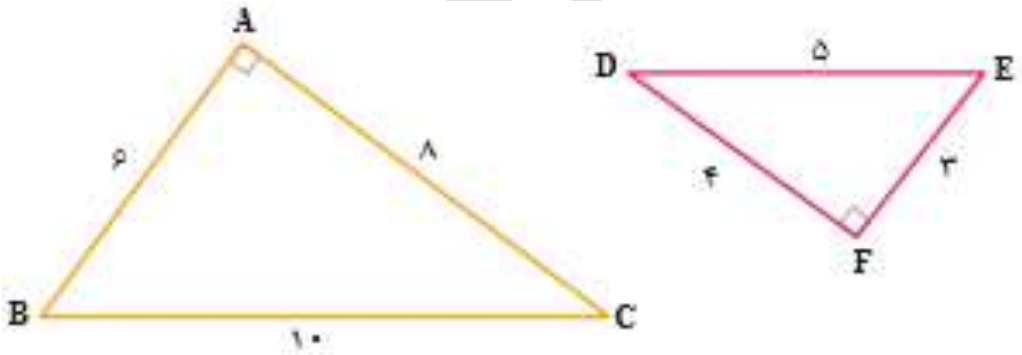
شکلهای متشابه

متشابه به معنی شبیه هم بودنه، دو تا شکل رو زمانی میگیم متشابه، که دقیقا شبیه هم باشن فقط اندازه هاشون با هم متفاوت باشه.

نسبت تشابه چیه؟

با یه مثال "نسبت تشابه" رو توضیح میدیم:

دو تا شکل زیر با هم متشابه هستن، اول ضلع های متناظر اونها رو مشخص کنید و بعد نسبت ضلعهای متناظر رو به صورت کسر بنویسید:



نسبت اضلاع متناظر به صورت زیر میشه:

$$\frac{10}{5}=\frac{8}{4}=\frac{6}{3}$$

اگه این کسرها رو ساده کنیم برابر $\frac{1}{2}$ ، هستند. به این نسبت، نسبت تشابه گفته میشه.

پس تعریف نسبت تشابه به این صورته:

به نسبت دو ضلع متناظر در دو شکل متشابه، نسبت تشابه گفته می‌شود.

یه نکته مهم:

اگه دو شکل متشابه باشن، حتما باید نسبت هر دو ضلع متناظرشون با هم برابر باشن.

مثلا توی شکل قبل، نسبت تشابه واسه هر سه تا ضلع برابر $\frac{1}{2}$ بود.

مثال:

مثلث ABC به ضلعهای ۴ و ۵ و ۸ با مثلث DEF به ضلع X-1 و 10 و X+7 با هم متشابهند. مقدار X را پیدا کنید.

چون دو شکل متشابهند پس نسبت تشابه بین اضلاع متناظر اونها با هم برابره . بنابراین داریم:

$$\frac{X+7}{8} = \frac{10}{5} = 2$$

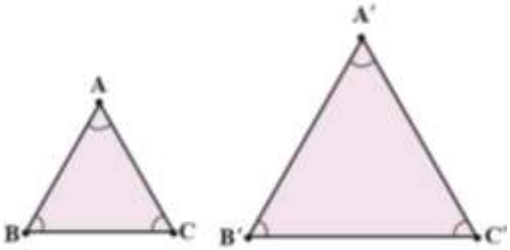
$$X + 7 = 16$$

اگه دو مثلث با هم متشابه باشن، در اونصورت:

زاویه های نظیر در اونها برابر و نسبت اضلاع متناظر هم با هم برابر باشن.

در شکل زیر دو مثلث با هم متشابهند، از تشابه این دو مثلث چه نتیجه‌ای می‌تونیم بگیریم؟

@RiaziBaHam



اولین نکته ای که درباره شکلهای متشابه گفتیم این بود که زوایای نظیرشون با هم برابره، بنابراین:

$$\hat{A}=\hat{A}', \hat{C}=\hat{C}', \hat{B}=\hat{B}'$$

نکته دیگه‌ای که درباره مثلثهای مشابه داشتیم این بود که نسبت اضلاع متناظرشون با هم برابره، بنابراین:

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{A'C'}$$

حالا ممکنه این سوال برامون مطرح بشه که چه زمانی دو مثلث با هم متشابهند؟

یکی از حالتها برای تشابه مثلثها به این صورته:

هرگاه دو زاویه از مثلثی، با دو زاویه از مثلثی دیگر برابر باشند، آن دو مثلث، متشابه‌اند.

پس ما اگه دو تا مثلث داشته باشیم و دو تا از زاویه های یکیشون با دو تا از زاویه های اون یکی برابر باشه، اونوقت این دو مثلث متشابهند.

به نظرتون اگه این حالت رو بخوایم برای دو تا مثلث قائم‌الزاویه بیان کنیم، چطوری میشه؟

میدونیم که در مثلث قائم‌الزاویه، اندازه یکی از زاویه‌ها ۹۰ درجه‌س.

@RiaziBaHam

نویسنده : معصومه تدریسی

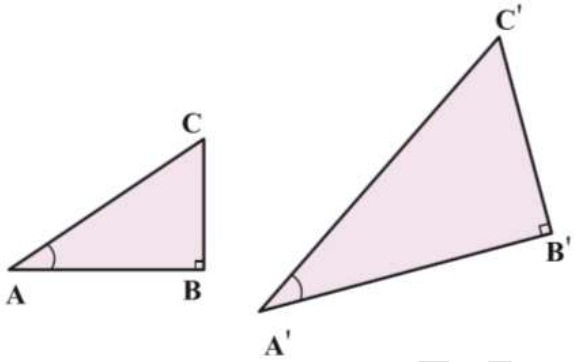
پس اگه درباره تشابه دو تا مثلث قائم‌الزاویه صحبت کنیم، فقط کافیه نشون بدیم که توی این دو تا مثلث یه زاویه برابر وجود داره. یعنی:

اگر $\overset{\Delta}{ABC}$ و $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ در شکل مقابل قائم الزاویه باشند و داشته باشیم $\hat{C} = \hat{C'}$، آنگاه

$$\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{A'B'C'}$$

کار در کلاس

۱ در مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ ABC و A'B'C'، $\hat{A} = \hat{A'}$. جاهای خالی را کامل کنید.



$$\overset{\Delta}{ABC} \square \overset{\Delta}{A'B'C'} \Rightarrow \frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{\quad} = \frac{BC}{\quad}$$

دو تا مثلث قائم‌الزاویه داریم، صورت سوال هم به ما گفته که زاویه‌های A و A' با هم برابرن. پس طبق مطلبی که در بالا یاد گرفتیم، این دو مثلث متشابهن. پس:

$$\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{A'B'C'}$$

حالا وقتی دو مثلث متشابه باشن، اضلاع متناظرشون هم با هم برابره، بنابراین داریم:

$$\frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$$

۲ از تساوی $\frac{AC}{A'C'}=\frac{AB}{A'B'}$، می‌توان نتیجه گرفت $\frac{AB}{AC}=\frac{A'B'}{A'C'}$ (چرا؟). با توجه به این نکته، جاهای خالی را کامل کنید :

$$\frac{AB}{BC}=\text{———} \quad \text{و} \quad \frac{BC}{AC}=\text{———}$$

گفتیم اگه دو شکل با هم متشابه باشن، نسبت اضلاع متناظرشون با هم برابره، پس:

$$\frac{AB}{BC}=\frac{A'B'}{B'C'} \quad , \quad \frac{BC}{AC}=\frac{B'C'}{A'C'}$$

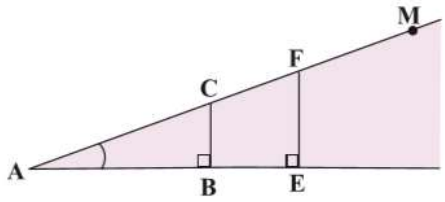
نتیجه : اگر زاویهٔ A از مثلث قائم‌الزاویه ABC با زاویه 'A از مثلث قائم‌الزاویه 'A'B'C (مطابق شکل بالا) برابر باشد، داریم :

$$\frac{BC}{AC}=\frac{B'C'}{A'C'} \text{ و } \frac{AB}{BC}=\frac{A'B'}{B'C'} \text{ و } \frac{AB}{AC}=\frac{A'B'}{A'C'}$$

دوستان توجه کنید که با توجه با تشابه دو مثلث به راحتی میتونیم این تساویها رو بنویسیم و نیاز به حفظ کردن ندارن ☺

فعالیت

۱ در شکل سمت راست، درستی تساوی $\frac{BC}{AB}=\frac{EF}{AE}$ را بررسی کنید.



ما اگه بتونیم ثابت کنیم که مثلثهای ABC و AEF با هم متشابهن، اونوقت میتونیم این تساوی رو نتیجه بگیریم:

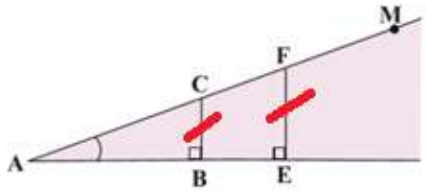
هر دو مثلث قائم‌الزاویه هستن، طبق مطلبی که در قسمت قبل یاد گرفتیم، برای اینکه ثابت کنیم که دو تا مثلث قائم‌الزاویه متشابهن، کافیه که نشون بدیم یه زاویه برابر دارن.

در اینجا زاویه A در هر دو مثلث مشترکه، پس هر دو مثلث متشابهن.

فرض کنیم طرف دوم تساوی رو نداریم و خودمون میخوایم بنویسیم:

$$\frac{BC}{AB} =$$

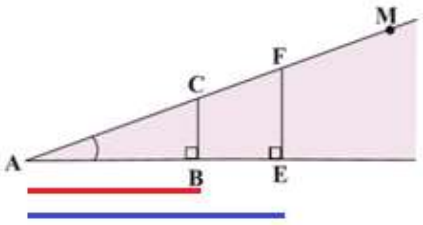
باید جلوی هر کدوم، ضلع متناظرش توی اون یکی مثلث رو بنویسیم، ضلع متناظر با BC کدوم ضلعه؟



ضلع EF ، پس EF رو جلوی BC می‌نویسیم:

$$\frac{BC}{AB} = \frac{EF}{}$$

ضلع متناظر با AB کدوم ضلعه؟



ضلع AE ، پس AE رو هم جلوی AB می‌نویسیم:

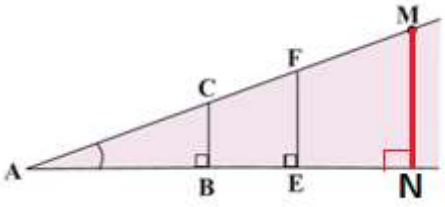
@RiaziBaHam

$$\frac{BC}{AB}=\frac{EF}{AE}$$

پس تونستیم تساوی رو ثابت کنیم:

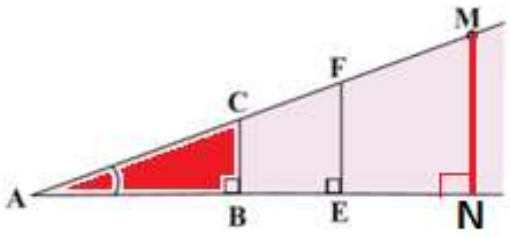
۲ نقطهٔ دیگری مثل M را در امتداد AC درنظر بگیرید و از آن نقطه، عمودی بر ضلع دیگرِ زاویه A رسم کنید و پای عمود را N بنامید. اکنون جاهای خالی را کامل کنید :

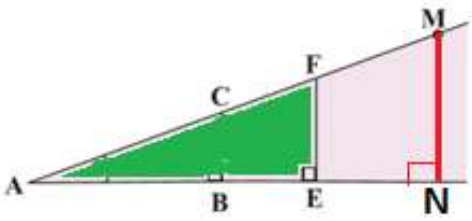
$$\frac{BC}{AB}=\frac{MN}{\quad}=\frac{\quad}{AE}$$

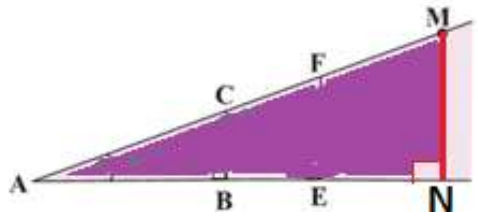


در اینجا سه تا مثلث قائم‌الزاویه داریم که یه زاویه‌شون با هم برابره، یعنی زاویه A

بنابراین سه تا مثلث با هم متشابهن. برای اینکه مثلثها رو بهتر بتونید تشخیص بدید، شکلهای زیر رو ببینید:



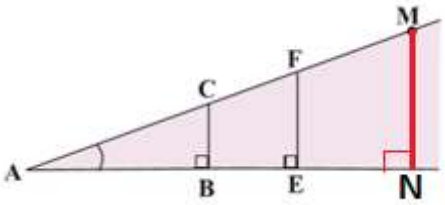




مثلثهای متشابه رو توی شکلهای بالا دیدیم، نسبت اضلاع متناظر در این سه مثلث با هم برابره ، بنابراین:

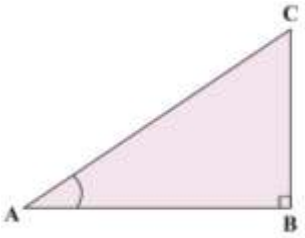
$$\frac{BC}{AB}=\frac{MN}{AN}=\frac{FE}{AE}$$

یه بار دیگه به شکل و تساوی قبل دقت کنید:



توی همه این مثلثها، نسبت ضلع مقابل به زاویه A به ضلع مجاور به زاویه A ، یه مقدار ثابته (همون مقداری که در تساوی قبل به دست آوردیم). به این عدد ثابت "تانژانت زاویهA" گفته میشه. به عبارت دیگه در هر مثلث قائم‌الزاویه دلخواه ABC داریم:

$$\tan A=\frac{\text{طول ضلع مقابل به زاویه A}}{\text{طول ضلع مجاور به زاویه A}}=\frac{BC}{AB}$$



حالا اگه ما جای صورت و مخرج رو با هم عوض کنیم، چیزی که به دست میاریم کتانژانت زاویه A هست. بنابراین:

@RiaziBaHam

$$\cot A=\frac{\text{طول ضلع مجاور به زاویه A}}{\text{طول ضلع مقابل به زاویه A}}=\frac{AB}{BC}$$

از این به بعد، برای اینکه راحت باشیم، به این صورت حفظ می‌کنیم:

$$\text{تانژانت}=\frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}}$$

$$\text{کتانژانت}=\frac{\text{مجاور}}{\text{مقابل}}$$

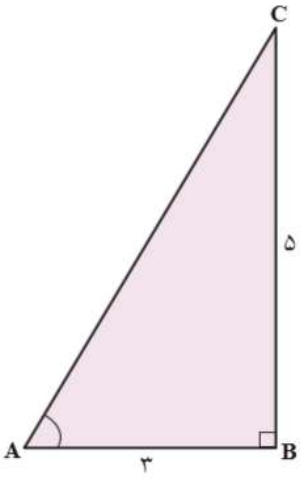
منظور از مقابل، مقابل به زاویه مورد نظر

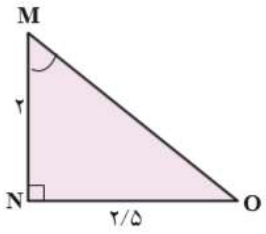
و منظور از مجاور ، مجاور به زاویه مورد نظرهست.

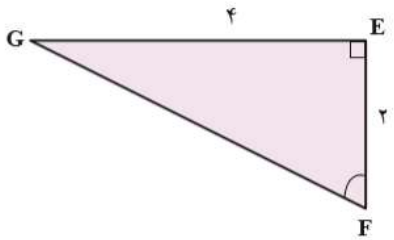
بریم یه تا مثال حل کنیم:

فعالیت

۱ در هر یک از شکل‌های زیر، جاهای خالی را کامل کنید.







$\tan A=\frac{BC}{AB}=\frac{۵}{۳}$ $\quad \cot M=\frac{MN}{NO}=\frac{}{۲/۵}$ $\quad \tan F=\text{——}=\text{——}$

$\cot A=\text{——}=\text{——}$ $\quad \tan M=\text{——}=\text{——}$ $\quad \cot F=\text{——}=\text{——}$

میخوایم کتانژانت M رو بنویسیم، کتانژانت یه زاویه برابر بود با مجاور به مقابل:

$$\text{M کتانژانت} = \frac{\text{M مجاور به}}{\text{M مقابل به}} = \frac{2}{2.5}$$

برای تانژانت زاویه F داریم:

$$\text{F تانژانت} = \frac{\text{F مقابل به}}{\text{F مجاور به}} = \frac{GE}{EF} = \frac{4}{2}$$

برای کتانژانت زاویه A داریم:

$$\text{A کتانژانت} = \frac{\text{A مجاور به}}{\text{A مقابل به}} = \frac{AB}{CB} = \frac{3}{5}$$

برای تانژانت زاویه M داریم:

$$\text{M تانژانت} = \frac{\text{M مقابل به}}{\text{M مجاور به}} = \frac{NO}{MN} = \frac{2.5}{2}$$

برای کتانژانت زاویه F داریم:

$$\text{F کتانژانت} = \frac{\text{F مجاور به}}{\text{F مقابل به}} = \frac{EF}{EG} = \frac{2}{4}$$

@RiaziBaHam

آموزش گام به گام ریاضی چهارم تا دهم در کانال @RiaziBaHam

برای دریافت جزوات سایر پایه‌ها ، تمرینهای حل شده و نمونه سوالات امتحانی حل شده، به کانال "ریاضی با هم" بپیوندید.